

ANALISIS PENYELESAIAN PERSAMAAN BERPANGKAT TIGA PADA PERSAMAAN ALIRAN SUPER KRITIS MENGGUNAKAN METODE NEWTON-RAPHSON

Irham

*Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Lhokseumawe
Jln. B.Aceh Medan Km.280 Buketrata 24301 INDONESIA*

irham.teluk @ yahoo.com

Abstrak— Metode Newton-Raphson merupakan salah satu prosedur perhitungan yang sangat luas penggunaannya untuk komputasi penentuan penyelesaian persamaan berpangkat tiga pada persamaan aliran super kritis, kondisi ini umumnya terjadi di kaki pelimpah bangunan bendung. Metode ini dapat menggunakan program komputer, terutama program excel secara sederhana. Persamaannya telah dikembangkan sehingga dapat menghitung persamaan aliran aliran super kritis pada saluran terbuka. Persamaan ini, dipresentasikan dalam bentuk metode Newton-Raphson, juga cocok untuk aliran subkritis, kritis dan super kritis pada bentuk aliran horizontal. Penyelesaian secara numerik dari persamaan aliran permanen, menghasilkan perhitungan dengan waktu yang sangat cepat. Metode ini untuk aliran permanen dapat digunakan untuk mengontrol profil hidraulik yang logis dengan fasilitas masukan data yang sangat sederhana. Metode ini dapat diselesaikan dengan bantuan program excel secara sederhana. Perhitungan harga awal iterasi dapat dipilih bebas, dan iterasi kedua yang diperoleh akan menjadi harga awal yang baru. Perhitungan dapat dihentikan bila harga iterasi sama dengan harga akhir, dengan kata lain harga yang diberikan tidak mengalami perubahan. Tingkat ketelitian hasil perhitungan dapat kita tentukan sendiri.

Kata kunci— Aliran super kritis, metode Newton Raphson, persamaan berpangkat tiga, profil hidraulik

Abstract— *The Newton-Raphson method is one of the most widely accepted procedures for computing open channel super critical surface and computing non linier equation. This method can computing tile water and spillway of the dam, and can computing with conventional computer madels. An algorithm has been developed that executes the Newton-Raphson method in super ciritical for open channels. This algorithm presented in Newton-Raphson form, is suitable for subcritical, critical, and super critical, and horizontal flow regimes. Transition channel sections having linierly variable bottom widths are easy accomandated. Numerical solution of this method, without using loop up tables and interpolation procedure, results in fast execution times. A steady flow computer program that uses the algorithm has been developed to perform some table checking of hydraulic profile logic and to facilitate simple data entry.*

Keywords— *Super critical flow regime, spillway, Newton-Raphson method, hydraulic profile.*

I. PENDAHULUAN

Pemakaian bahan ajar Hidrolika Saluran Terbuka karangan Chow [1], baik edisi bahasa Inggris maupun edisi bahasa Indonesia, cukup luas pemakaiannya di perguruan tinggi Indonesia, termasuk di politeknik seluruh Indonesia. *course notes* (bahan ajar) hidrolika yang disusun oleh PEDC (sekarang P5D) di Bandung, juga mengacu ke buku tersebut. Penyelesaian matematik dari persamaan pada penampang aliran terbuka pada bahan ajar tersebut, masih menggunakan cara coba-coba. Untuk hal di atas, maka melalui karya ilmiah ini akan diperkenalkan cara perhitungan yang lebih sederhana dengan menggunakan persamaan numerik yang sudah disederhanakan. Diharapkan metode ini dapat diajarkan kepada mahasiswa program diploma III politeknik jurusan Teknik Sipil khususnya bidang konsentrasi bangunan air, sehingga dapat meningkatkan minat belajar dan pemahaman yang lebih baik dan lebih sederhana untuk penyelesaian perhitungan pada persamaan aliran super kritis pada saluran terbuka untuk kasus persamaan perhitungan aliran berpangkat tiga.

Penyelesaian persamaan penampang saluran terbuka yang umum dijabarkan dalam buku [2] dan [3], semua persamaan aliran untuk yang berpat tiga maupun persamaan non linier lainnya diselesaikan dengan cara coba-coba. Berdasarkan cara ini, persamaan dibagi menjadi dua ruas persamaan, kemudian diberi nilai awal dengan cara coba-coba. Hasil akhir

perhitungan harus diperoleh bahwa nilai ruas kiri sama dengan ruas kanan [2]. Cara ini sangat membutuhkan kesabaran dan ketelitian dalam memperkirakan nilai awal, hal ini dapat menyebabkan proses perhitungan sangat panjang dan melelahkan. Untuk dapat menyelesaikan dengan cara lebih sederhana dan akurat, dapat digunakan metode Newton-Raphson [1]. Metode ini dikembangkan berdasarkan ilmu Metode Numerik yang diusulkan oleh Griffiths and Smith [3]; dan Paine [9].

Pada saat ini ilmu Metode Numerik sudah sangat berkembang, hal ini terjadi banyaknya persamaan matematika yang tidak dapat diselesaikan dengan cara coba-coba, atau juga membutuhkan waktu yang lama untuk penyelesaian hasil perhitungan. Juga berkembangnya ilmu komputer, sehingga semua persamaan numerik yang dikepingkan dapat diproses dan diselesaikan oleh komputer, dalam hal ini dapat diselesaikan melalui program excel. Metode Newton-Raphson untuk studi kasus karya ilmiah ini dibatasi hanya dalam perhitungan penampang aliran super kritis yang terjadi di kaki pelimpah. Perhitungan aliran pada kaki pelimpah sangat umum dihitung pada perencanaan bangunan air dan waduk. Secara umum telah di hitung oleh Ma'rifah, B, H dan Kusnan [7] dan [5].

Adanya ambang pada pelimpah, maka aliran air yang mengalir meningkat dengan ketinggian tertentu di atas mercu, yang sering diberi lambang sebagai tinggi Hd. Aliran kemudian meluncur melalui kaki pelimpah menuju kolam (lantai) olakan. Menurut referensi [8] dan [4], tinggi muka

air luapan sampai lantai ruang olakan dan termasuk tinggi kecepatan (lihat Gambar 1), dihitung berdasarkan persamaan :

$$T_o = y_1 + \frac{q^2}{2g\theta^2(y_1^2)} \tag{1}$$

Disini T_o adalah tinggi muka air luapan sampai lantai ruang olakan (m), y_1 adalah tinggi aliran di kaki pelimpah (m), q adalah debit aliran per satuan lebar (m³/det), g adalah percepatan gravitasi bumi yang ditetapkan 9,81 m/det², dan koefisien θ adalah perbandingan antara kecepatan sebenarnya dengan kecepatan teoritis pada kaki pelimpah (tak berdimensi). Adapun harga θ didekati dengan persamaan Novak, 1981 ;

$$\theta = 1 - 0,0155 \frac{S}{Hd} \tag{2}$$

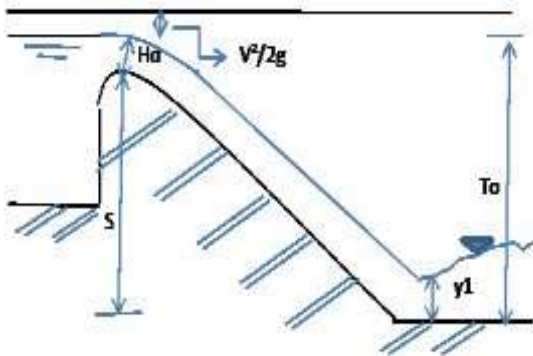
Penentuan harga debit per satuan lebar mercu pelimpah (q) berdasarkan persamaan 6, persamaan ini hanya berlaku untuk pelimpang mercu bendung/pelimpah samping dan saluran lebar. Bila pelimpang pada pelimpah samping bendungan maka $b = b_{ef}$ [4] :

$$q = \frac{Q}{b_{ef}} \tag{3}$$

Disini Q adalah debit banjir rencana (desain), dan b_{ef} adalah lebar efektif pelimpah (m). Adapun penentuan bahwa aliran bersifat sub kritis, kritis dan super kritis, didekati dengan persamaan [5] ;

$$F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} \tag{4}$$

Disini F_1 adalah bilangan Froude, bila lebih dari satu berarti saluran bersifat super kritis, dan V_1 adalah kecepatan di kaki pelimpah (m/det) . Adapun posisi ketinggian air di kaki pelimpah, dapat dilihat pada Gambar 1 di bawah ini.



Gambar 1. Aliran di kaki pelimpah

II. METODOLOGI PENELITIAN

Metode Newton-Raphson paling banyak digunakan dalam mencari akar-akar dari suatu persamaan, terutama persamaan berpangkat tiga dan persamaan non linier. Persamaan ini dikembangkan dari deret Taylor, dengan perkiraan awal dari akar adalah x_n . Dari rentang jarak yang kecil h pada arah sumbu x , persamaan deret Taylor dapat diekpresikan sebagai persamaan berikut ini [3], [9], [10] :

$$f(x_{n+1}) = f(x_n + h) = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2} f''(x_n) + \dots \tag{5}$$

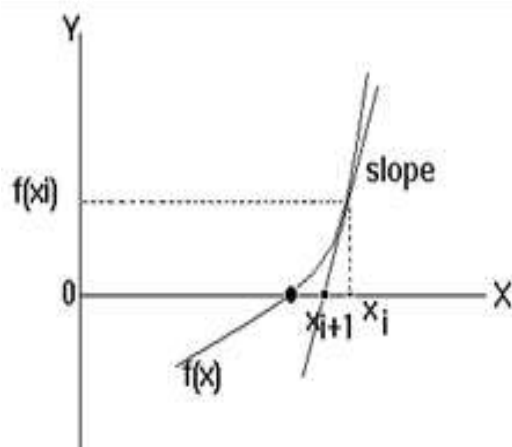
Dengan demikian x_{n+1} adalah suatu akar, maka $f(x_n + h) = 0$, jika ditinjau ke orde f' , diperoleh :

$$f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) = 0 \tag{6}$$

Persamaan (9) dapat disusun kembali menjadi sebuah akar persamaan, yaitu :

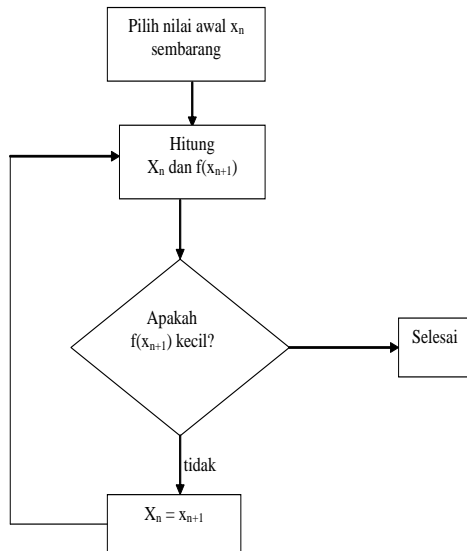
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{7}$$

Persamaan (7) di atas merupakan persamaan dasar dalam perhitungan iterasi akar dari metode Newton-Raphson untuk penyelesaian persamaan non linier dalam aliran saluran terbuka. Apabila kita merujuk berdasarkan Gambar 1 di bawah ini, turunan pertama pada x_i adalah ekivalen dengan kemiringan. Hal ini sesuai yang diperoleh dari referensi [6], dan persamaan (7) diatas terbukti adanya. Proses iterasi dan penyelesaian persamaan secara bagan alir ditampilkan pada Gambar 2 di bawah ini. Kelebihan persamaan ini, yakni harga awal yang ditetapkan dapat digunakan untuk nilai berikutnya, sehingga nilai yang diperoleh saling mengikat dan berhubungan dengan urutan iterasi.



Gambar 2. Grafik proses perhitungan Newton-Raphson

Berikut bagan alir yang digunakan dalam penyelesaian persamaan berpangkat non linier menggunakan metode Newton-Raphson, disajikan pada gambar 3 di bawah ini.

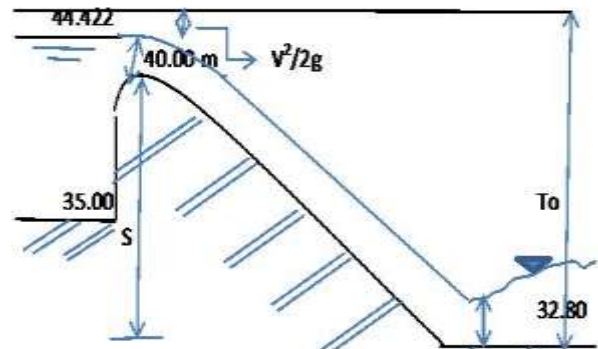


Gambar 3. Proses perhitungan Metode Newton-Raphson

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk kajian studi kasus digunakan tugas mahasiswa D3 konsentrasi bangunan air Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Lhokseumawe, yang merupakan tugas rancangan berupa mata kuliah Project Work Bendung. Dalam hal perencanaan mercu pelimpah,, terutama perhitungan ketinggian aliran di kaki mercu pelimpah diperoleh persamaan aliran yang berpangkat tiga. Uraian berikut ini dapat menjadi acuan dalam hal perhitungan aliran di kaki pelimpah mercu bendung.

Berikut ini ditentukan uji kasus berupa pelimpah yang direncanakan pada bendung berdasarkan data bahwa debit banjir desain 2480 m³/det, lebar efektif sungai pada lokasi bendung 76,50 m, kecepatan mendekai mercu ditentukan 2,12 m/det. Penentuan elevasi pada lantai depan +35.00 m, elevasi mercu +40.00 m, ketinggian air di atas mercu +44.422 m, elevasi lantai kolam olakan +32.80 m. Data lengkap semua elevasi perencanaan pelimpah tersaji pada Gambar 4 di bawah ini.



Gambar 4. Data desain di kaki pelimpah

Perhitungan utama dalam desain aliran di kaki pelimpah didasarkan kepada persamaan 4, masing masing komponen pada persamaan tersebut diurai satu persatu. Selanjutnya dapat ditentukan masing masing harga; S untuk memperoleh tinggi lantai hilir pelimpah hingga ke puncak mercu, Hd adalah tinggi air rencana di atas mercu pelimpah,, dan θ adalah perbandingan antara kecepatan sebenarnya dengan kecepatan teoritis pada kaki pelimpah (tak berdimensi). Perhitungan diuraikan satu persatu berikut ini.

$$S = 40 - 32.80 = 7,20 \text{ m}$$

Hd = 44.422 - 40 = 4.422 m, berdasarkan persamaan (5) diperoleh;

$$\theta = 1 - 0,0155 \frac{7.20}{4.422} = 0.975$$

Harga debit persatuan lebar q diperoleh :

$$q = \frac{2480}{76.50} = 19.972 \text{ m}^3/\text{det}/\text{m}$$

Berdasarkan hasil hitungan di atas, kemudian dimasukkan kedalam persamaan 4 di atas, maka persamaannya menjadi ;

$$7.20 + 4.422 + \frac{2.12^2}{2 \times 9.81} = y1 + \frac{21.386262^2}{2 \times 9.81 \times (0.972)^2 \times (y1)^2}$$

$$\frac{0.5541}{y1} = 0.046759 + \frac{1}{y1^3}$$

Bila dimisalkan $x = 1/y1$

Persamaan di atas bila disederhanakan menjadi :

$$x_1^3 - 0.5541x_1 + 0.046758 = 0 \tag{A}$$

Persamaan (A) dilakukan perhitungan dengan dua metode, yakni perhitungan cara coba coba, dan dibandingkan dengan cara Metode Nwton-Raphson. Persamaan (A) yang digunakan pada [1] dihitung dengan cara coba-coba, yakni dengan memasukkan suatu harga x secara acak dan bebas, dengan catatan harus mendekati deviasi terkecil. Adapun proses

perhitungancara coba coba dibuatkan berdasarkan Tabel 1 di bawah ini.

TABEL 1
PERHITUNGAN CARA COBA COBA

Iterasi	pers (A)	Deviasi
0.6000	-0.069711	0.069711
0.6100	-0.064271	0.064271
0.6200	-0.058465	0.058465
0.6300	-0.052287	0.052287
0.6400	-0.045731	0.045731
0.6500	-0.038791	0.038791
0.6600	-0.031461	0.031461
0.6700	-0.023735	0.023735
0.6800	-0.015607	0.015607
0.6900	-0.007071	0.007071
0.7000	0.001879	0.001879
0.7100	0.011249	0.011249

Berdasarkan Tabel 1 di atas, bahwa iterasi pertama 0,60 dan terlihat bahwa deviasi masih besar sekitar 6,97 %.Kemudian dilanjutkan iterasi dengan menaikkan harga iterasi 0,1000. Terakhir hasil iterasi ke 11 barulah mendekati nilai benar dengan deviasi 0,001879, dan bila dilanjutkan deviasi membesar kembali. Maka dihasilkan nilai $x = 0,7000$. Harga eksak yang diperoleh untuk x tersebut maka harga $y = 1,429$ m. Harga iterasi tersebut harus diperhatikan bahwa pada kedua ruas persamaan harus mendekati nol, hal mana yang terkecil terjadi pada iterasi ke 11, dan untuk iterasi ke 12 terlihat kembali deviasi membesar kembali. Untuk menentukan harga taksiran awal pada table 1 sangat membutuhkan pengalaman, kadang-kadang membutuhkan waktu yang lama. Adapun penentuan harga deviasi pada Table 1 di atas menggunakan harga mutlak, sehingga deviasi tetap berharga positif.

Setelah diperoleh harga dengan cara coba coba, selanjutnya dilakukan uji menggunakan metode Newton-Raphson. Adapun pendekatan metode Newton-Raphson yaitu menyelesaikan persamaan (8) dan (9), lebih lanjut diperoleh:

$$f(x) = x^3 - 0,5541 x + 0,46759$$

$$f'(x) = 3x^2 - 0,5541$$

Penyelesaian persamaan tersebut berdasarkan rumus (5) dan (6) di atas dibuat dalam bentuk table. Tabel tersebut disajikan pada Tabel 2 yang menggunakan program excel, di bawah ini.

TABEL 2
PERHITUNGAN METODE NEWTON-RAPHSON

Iterasi	f(x)	f'(x)	f(x)/f'(x)	y_{n+1}
0.8000	0.1155	1.3659	0.0845	0.7155
0.7155	0.0165	0.9815	0.0169	0.6986
0.6986	0.0006	0.9100	0.0007	0.6979
0.6979	0.0000	0.9072	0.0000	0.6979
0.6979	0.0000	0.9072	0.0000	0.6979
0.6979	0.0000	0.9072	0.0000	0.6979
0.6979	0.0000	0.9072	0.0000	0.6979
0.6979	0.0000	0.9072	0.0000	0.6979

Langkah awal adalah member harga awal 0,8000, lebih besar daripada harga pada cara coba coba. Terlihat bahwa pada iterasi ke 2, sudah terlihat harga taksiran mendekati harga yang benar. Hasil perhitungan Tabel 2 di atas yang mendekati nilai yang benar dan eksak diperoleh pada iterasi ke 3, harganya tidak berubah lagi. Perhitungan tersebut bila di iterasi ke 9 dan seterusnya, tetap menghasilkan harga 0,6979 dan tidak berubah lagi. Disini terlihat bahwa perhitungan Tabel 2 menggunakan excel sangat mudah dan sederhana. Harga awal yang diberikan 0,8000, menghasilkan harga baru 0,6979. Terlihat bahwa harga 0,6979 kemudian menjadi harga awal baru pada langkah iterasi berikutnya, sampai diperoleh harga baru yang tidak berubah lagi (berharga tetap). Harga tetap terjadi pada iterasi ke 3, karena pada selisih persamaan $f(x)$ menjadi nol. Berdasarkan harga $x = 0,5979$, diperoleh harga $y = 1,433$ m. Adapun kondisi aliran pada kaki pelimpah, berdasarkan persamaan 7, dengan asumsi $V1=q/y1$ maka persamaan 7 diselesaikan menjadi :

$$F1 = \frac{q}{y1 \sqrt{gy1}} = \frac{19,972}{1,433 \sqrt{9,81 \times 1,433}} = 3,72$$

Terbukti aliran bersifat super kritis, $F1 > 1$.

Berdasarkan pembahasan terdahulu terlihat bahwa metode Newton-Raphson lebih cepat dan praktis dan tingkat deviasinya menjadi nol. Sementara itu metode cara coba coba masih menyisakan deviasi, tergantung tingkat ketelitian estimator yang menghitung persamaan tersebut. Berdasarkan perhitungan pada Tabel 1 diperoleh $y = 1,429$ m dan perhitungan pada Tabel 2 diperoleh $y = 1,433$ m. Maka dalam perencanaan dan perhitungan yang eksak maka dipilih harga $y = 1,433$ m, karena tingkat kesalahannya mendekati nol. Berdasarkan hasil perhitungan yang telah dieksekusi di atas, terlihat bahwa kedua table menggunakan perhitungan dengan bantuan program excel, namun langkah dan proses kerjanya sangat berbeda. Dengan demikian untuk keperluan praktis maka metode Newton-Raphson sangat membantu mahasiswa teknik sipil terutama mahasiswa yang mendalami ilmu bangunan air, terutama penyelesaian perhitungan berpangkat tiga atau persamaan non linier lainnya.

IV. KESIMPULAN

Salah satu objektif dari pengembangan metode Newton-Raphson adalah memaksimalkan kecepatan penyelesaian persamaan berpangkat non linier, terutama persamaan berpangkat tiga. Jika metode ini dapat dikembangkan secara luas untuk perhitungan aliran seragam, maka akan sangat mempermudah individu/estimator yang berkecimpung dalam ilmu hidrolika, baik mahasiswa, dosen, praktisi teknik sipil dan para periset. Metode ini dapat dihitung secara manual, namun lebih cepat dan praktis bila menggunakan personal

komputer, yaitu dengan menghitung menggunakan excel. Metode ini dapat dipelajari dan dipakai mulai dari mahasiswa politeknik program diploma III, hingga program sarjana dan bahkan pasca sarjana.

Dengan demikian terbukti bahwa metode Newton-Rapson sangat mudah dan praktis perhitungannya dan mempunyai kelebihan, yaitu: persamaannya menggunakan persamaan numerik yang sangat sederhana dan praktis. Selanjutnya dapat dihitung dengan cepat dengan menggunakan program excel. Adapun harga iterasi pada metode Newton-Raphson yang telah didapat, bila belum memenuhi syarat, dapat langsung menjadi harga awal iterasi selanjutnya. Mudah dan bebas dalam memberi harga awal. Akhirnya hasil perhitungan sangat cepat diperoleh dan dapat diubah-ubah sesuai data awal, serta deviasi dan tingkat kesalahannya mendekati nol.

REFERENSI

- [1] Chow, V. T., 1992, Hidrolika Saluran Terbuka, terjemahan Rosalina, E. V. N, Penerbit Erlangga, Jakarta 10430.
- [2] Chaudhry, M. H., 1993, Open-Channel Flow, Prentice Hall, New Jersey 07632
- [3] Griffith, D. V. and Smith, I. M., 1991, Numerical Methods for Engineers, Hartnolls Ltd, Great Britain.
- [4] Irham, 2006, *Penentuan penampang aliran saluran terbuka menggunakan Metode newton-Raphson*, Jurnal Teknologi, Vol.6, NO.2, hal 61-65, Oktober 2006.
- [5] Irham, Kurniati, *Dampak penyempitan penampang sungai terhadap kondisi aliran (studi kasus pada Sungai Krueng Pase)*, dalam Prosiding SNYuBe 2013, hal 126-131.
- [6] Mays, W. M., 2001, Water Resources Engineering, John Wiley & Sons, USA
- [7] Ma'rifah, B. H., Kusnan, 2016, Pengaruh Pola Aliran pada Saluran Pelimpah Samping akibat dari Penempatan Spillway dengan Tipe Mercu Ogee Waduk Wonorejo, Jurnal Rekayasa Teknik Sipil REKATS, Fakultas Teknik Universitas Negeri Surabaya, Vol. 03, hal 23-34, ISSN 2253-5009, e-journal, Surabaya.
- [8] Novak, 1981, Applied Hydraulics, Delf University, Netherland.
- [9] Paine, J. N., 1992, *Open-Channel Flow Algorithm in Newton-Raphson Form*, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE, Vol. 118, No. 2.
- [10] Triatmodjo, B., 1992, Metode Numerik, Beta Offset, Yogyakarta.